

Урок №104

Тема: Решение задач по теме «Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона—Лейбница»

Срок сдачи до 06.03.2024

Распределение по вариантам:

Фамилия Имя	Вариант
Гарматюк Александр	1
Гарматюк Александра	2
Глебова Елена	1
Демиденко Роман	2
Забродин Георгий	1
Киселева Доминика	2
Клименок Андрей	1
Колмагоров Дмитрий	2
Комболин Данил	1
Москвин Иван	2
Николаев Николай	1
Овчинникова Карина	2
Пенкина Вероника	1
Подмазов Владислав	2
Поленчик Мария	1
Поляничкина Антонина	2
Пятакова Ирина	1
Рыжак ВЯчеслав	2
Стаценко Тихон	1
Чагина Анастасия	2
Чуфаров Егор	1
Шестакова Дарья	2
Шефер Михаил	1
Шилова Анастасия	2
Сызранцев Константин	1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Алгебра и начала анализа.10-11 классы; под ред. А.Н.Колмогорова.

М: Просвещение,2011. Стр.174-188.

Пример нахождения первообразной

Математические задачи, операции часто различаются как прямые и обратные. Например, сложение и вычитание, умножение и деление. Мы в последнее время занимались дифференцированием, то есть нахождением производных. На этом уроке мы займемся обратной операцией – интегрированием, или нахождением первообразных.

Прямая задача:

Дано: $F'(x)$.

Найти: $F(x) = f(x)$.

Пример:

$$F(x) = x^2, F'(x) = f(x) = 2x$$

Обратная задача:

Дано: $F'(x) = f(x)$.

Найти: $F(x)$.

Пример:

$$F'(x) = f(x) = 2x. F(x) = x^2$$

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Строгое определение первообразной функции

Определение:

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X , если для всех $x \in X$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

2. Рассмотрение задач на основе определения первообразной функции

Закрепим определение конкретными примерами.

Примеры:

$F(x) = x$ – первообразная для $f(x) = 1$, так как $F'(x) = x' = 1$, то есть $F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ – первообразная для $f(x) = x^2$, так как $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2$, то есть $F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$

$F(x) = 3 \cos x$ – первообразная для $f(x) = -3 \sin x$, так как $F'(x) = (3 \cos x)' = -3 \sin x$, то есть $F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$

3. Таблица первообразных, проверка и обоснование

Вспомним, что для нахождения производных существовала таблица производных. Точно так же, для нахождения первообразных, имеется таблица первообразных, часть которой представлена далее (Табл. 1):

	Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
1	0	1
2	1	x
3	x	$\frac{x^2}{2}$

4	$x^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
5	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$

Табл. 1. Таблица первообразных

Проверим рассмотренную часть таблицы, то есть проверим определение:

$$F'(x) = f(x)$$

$$1. \quad 1' = 0$$

$$2. \quad x' = 1$$

$$3. \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

$$4. \quad \left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n$$

$$5. \quad \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$

Таким образом, эта часть таблицы проверена.

Продолжим изучение и обоснование таблицы. Следующая часть таблицы первообразных представлена ниже (Табл. 2):

	Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
6	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ (при $x > 0$)
7	$\sin x$	$-\cos x$
8	$\cos x$	$\sin x$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

Табл. 2. Таблица первообразных (продолжение)

Полезно проверить, обосновать и доказать данную часть таблицы.

$$6. \quad (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$7. \quad (-\cos x)' = -(\cos x)' = \sin x$$

$$8. \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$9. \quad (-\operatorname{ctg} x)' = -(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10. \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таблица обоснована.

4. Решение примеров и задач на определение первообразной

Теперь мы имеем определение первообразной и таблицу первообразных, обоснованную этим определением. Продолжим решение задач на определение первообразной.

Докажите: $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, если

$$a) \quad F(x) = x^5; f(x) = 5x^4, x \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

$$F'(x) = (x^5)' = 5x^4, \quad F'(x) = f(x)$$

б) $F(x) = \frac{1}{7}x^7; f(x) = x^6, x \in \mathbb{R}$

Доказательство:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{7}x^7\right)' = \frac{1}{7}(x^7)' = \frac{1}{7} \cdot 7x^6 = x^6, \quad F'(x) = f(x)$$

Рассмотрим еще одну задачу.

Докажите: $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, если

$$F(x) = \sin^2 x, \quad f(x) = \sin 2x, x \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

$$F'(x) = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \quad F'(x) = f(x)$$

Напоминание:

1. $(f(u(x)))' = f_u' \cdot u_x'$

2. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Рассмотрим задачу с тангенсом.

Докажите: $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, если

$$F(x) = 4 + \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Доказательство:

$$F'(x) = (4 + \operatorname{tg} x)' = 4' + (\operatorname{tg} x)' = 0 + \frac{1}{\cos^2 x}, \quad F'(x) = f(x)$$

Рассмотрим задачу с косинусом.

Докажите: $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, если

$$F(x) = 2x + \cos \frac{x}{2}, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Доказательство:

$$F'(x) = \left(2x + \cos \frac{x}{2}\right)' = (2x)' + \left(\cos \frac{1}{2}x\right)' = 2 - \sin \frac{1}{2}x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' = 2 - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}, \\ F'(x) = f(x)$$

Рассмотрим аналогичную задачу с иррациональным выражением.

Докажите: $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, если

$$F(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad x \in (-2; 2)$$

Доказательство:

$$F'(x) = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (4 - x^2)' = -\frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad F'(x) = f(x) \\ (4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2)$$

ХОД ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Найдите общий вид первообразных $F(x)$ для функции $y=f(x)$ на указанном промежутке:

а) $f(x) = 2x - 5$ на \mathbf{R}

б) $f(x) = x^7 - 2\sin x$ на \mathbf{R} ;

с) $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ на $(0; \infty)$

2. Для функции $y = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ найти ту

первообразную, график которой проходит через точку $(-1; -1)$

3. Докажите, что функция $F(x) = 3x + \sin^2 3x$

является первообразной для функции

$$f(x) = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$$

4. Пусть функция $F(x)$ – та первообразная функции $f(x) = 5 - 2x$

график которой имеет с графиком функции $f(x)$ общую точку на оси ординат. Найдите все общие точки графиков функций $f(x)$ и $F(x)$.

Вариант 2

а) $f(x) = 3x - 1$ на \mathbf{R} ;

б) $f(x) = x^5 + 5\cos x$ на \mathbf{R} ;

с) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$

2. Для функции $y = \frac{1}{(2x+1)^2}$ найти ту

первообразную, график которой проходит через точку $(-1; 1)$

3. Докажите, что функция $F(x) = 3x + 2\sin 2x + 0,25\sin 4x$

является первообразной для функции

$$f(x) = 8\cos^4 x$$

4. Пусть функция $F(x)$ – та первообразная функции $f(x) = 4x - 1$

график которой имеет с графиком функции $f(x)$ общую точку на оси ординат. Найдите все общие точки графиков функций $f(x)$ и $F(x)$.